سوالات کنکور سراسری صنایع صنایع سال ۹۰

۱- برای محاسبه هزینه برق مصرفی تا ۴۰ کیلووات هزینه a_1 ، بین ۴۰ تا ۶۰ کیلووات برای مازاد ۲۰ کیلووات a_2 که $(a_2 > a_1)$ و برای مقادیر بیشتر از ۶۰ کیلووات a_3 که $(a_3 > a_2)$ است در نظر گرفته می‌شود. برای مینیمم‌سازی چنانچه $i = 1,2,3$ و x_i میزان برق مصرفی در هر یک از بازه‌ها باشد و y_i نیز متغیر صفر و یک که مقدار یک را تنها زمانی که x_i به حد بالای خود برسد بگیرد. فرم مناسب مدل‌سازی کدام گزینه زیر است؟ (**M** عدد بزرگ مثبت است.)

۱) $$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \\ &\text{s.t.}\quad x_1 \le 40 \\ &\qquad x_2 \le 20 \\ &\qquad x_3 \ge 60 \end{aligned}$$

۲) $$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \\ &\text{s.t.}\quad 40y_1 \le x_1 \le 40 \\ &\qquad 20y_1 \le x_2 \le 20y_2 \\ &\qquad x_3 \le My_3 \end{aligned}$$

۳) $$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \\ &\text{s.t.}\quad 0 \le x_1 \le 40y_1 \\ &\qquad 20y_2 \le x_2 \le 20y_1 \\ &\qquad x_3 \le My_2 \end{aligned}$$

۴) $$\begin{aligned} &\min a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ &\text{s.t.}\quad 40y_1 \le x_1 \le 40 \\ &\qquad 20y_2 \le x_2 \le 20y_1 \\ &\qquad x_3 \le My_2 \end{aligned}$$

۲- یک شرکت تولیدی کلاً ۴۰ ساعت وقت جهت تولید محصولات زیر دارد:

تولید هر واحد محصول **A** نیازمند یک ساعت کار

تولید هر واحد محصول **B** نیازمند دو ساعت کار و دو واحد محصول **A** است.

تولید هر واحد محصول **C** نیازمند سه ساعت کار و یک واحد محصول **B** است.

محصولاتی که در تولید محصولات دیگر استفاده می‌شوند جزئی از آنها شده و قابل تفکیک نیستند. اگر میزان تولید اولیه محصولات **A**، **B** و **C** را به ترتیب با X_A، X_B و X_C نشان دهیم، در کدام گزینه محدودیت ساعت کار به صورت زیر خواهد بود؟

۱) $X_A + 4X_B + 7X_C \le 40$

۲) $X_A + 7X_B + 4X_C \le 40$

۳) $4X_A + 7X_B + X_C \le 40$

۴) $7X_A + 4X_B + X_C \le 40$

۳- فرض کنید y_A، y_B و y_C متغیرهای صفر و یک نماینده انجام یا عدم انجام آلترناتیوهای **A**، **B** و **C** باشند ($y_i = 1$ انجام و $y_i = 0$ عدم انجام) اگر **A** یا **B** انتخاب شود **C** نباید انتخاب شود با کدام گزینه زیر هم ارز است؟

۱) $y_A + y_B \le 2y_C$

۲) $y_A + y_B \le 2(1 - y_C)$

۳) $y_A - y_B \le 2(1 - y_C)$

۴) $y_A + y_B \le 2(1 + y_C)$

۴- در مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر:

$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + 3x_2 \le 9 \\ & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & -x_1 \le -1 \\ & -x_2 \le -1 \\ & x_1\ ,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

در نقطه بهینه، گرادیان تابع هدف، در مخروط گرادیان حاصل از کدام‌یک از محدودیت‌های فعال واقع می‌شود؟

۱) محدودیت ۱ و ۲ ۲) محدودیت ۱ و ۳ ۳) محدودیت ۲ و ۴ ۴) محدودیت ۳ و ۴

۵- دو مسئله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & z_1 = \text{Min}\ cx \\ & \text{s.t.}\ \ f(x) = b \\ & (1)\ \ x \ge 0 \end{aligned} \qquad , \qquad \begin{aligned} & z_2 = \text{Min}\ cx \\ & \text{s.t.}\ \ f(x) = tb \\ & (2)\ \ x \ge 0 \end{aligned}$$

اگر تابع f خطی باشد آنگاه چه نتیجه‌ای گرفته می‌شود؟

۱) $z_2 \le tz_1$ ۲) $z_2 = tz_1$ ۳) $z_2 \ge tz_1$ ۴) هیچکدام

۶- مجموعه $S = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \ge |x_1|\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت S یک مجموعه .... و .... نقطه گوشه است.

۱) محدب، با یک ۲) محدب، با بینهایت ۳) غیرمحدب، با یک ۴) محدب، بدون

۷- در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با دو متغیر اصلی و با سه محدودیت $\le$ و تابع هدف ماکزیمم‌سازی $x_1 + 3x_2$ جدول بهینه زیر بدست آمده است. اگر مقادیر سمت راست و ضرایب تابع هدف بصورت زیر تغییر کنند:

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 26 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

λ چقدر باشد تا حداکثر مقدار تابع هدف با حفظ جدول بهینه زیر حاصل گردد؟

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
x_1	۱	۰	۰/۵	۰	-۰/۵	۲
s_2	۰	۰	-۲/۵	۱	۱/۵	۱۲
x_2	۰	۱	۰/۵	۰	۰/۵	۶

۱) ۰/۵ ۲) ۰ ۳) -۰/۴ ۴) -۱/۲۵

۸- در مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر:

$$\begin{aligned} & \max(x_1 + x_2) \\ & \text{s.t.}\ \ kx_1 + x_2 \le p \\ & \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

به ازای کدام مقادیر زیر مسأله دارای جواب بیکران است؟

۱) $k = 0, p = -1$ ۲) $k = 1, p = -1$ ۳) $k = -1, p = 0$ ۴) $k = 1, p = 1$

۹- دو مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$P_1 \quad \text{Min}\{c'x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$
$$P_2 \quad \text{Max}\{b'u \mid A'u \leq c, u \geq 0\}$$

و فرض کنید $b \leq 0$, $c \geq 0$ بوده و علامت i' به معنی ترانهاده بردار یا ماتریس مربوطه است. در این صورت:

۱) P_1 بیکران و P_2 غیرموجه است.
۲) P_1 غیرموجه و P_2 بیکران است.
۳) P_1 و P_2 هر دو دارای جواب بهینه محدود هستند.
۴) P_1 و P_2 هر دو دارای جواب موجه نیستند.

۱۰- در مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله حمل و نقل، محدودیت‌های اصلی مسأله به صورت زیر است:

$$\sum_j x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

در این صورت چگالی ماتریس ضرائب (نسبت اعداد غیرصفر به اعداد صفر) آن چند درصد است؟

۱) $\frac{200}{m+n}$
۲) $\left(\frac{m+n}{mn}\right)*100$
۳) $\left(\frac{mn-(m+n)}{mn}\right)*100$
۴) $\left(\frac{mn-(m+n)}{2mn}\right)*100$

۱۱- جواب اولیه شدنی گوشه در مدل حمل و نقل در شبکه حمل و نقل معادل آن دارای چه خاصیتی است؟

۱) مابین گره‌های عرضه بال دارد.
۲) مابین گره‌ها چندین دور دارد.
۳) درخت گسترش است.
۴) به تعداد کل گره‌های عرضه و تقاضا کمان دارد.

۱۲- مسأله LP زیر را در نظر بگیرید:

$$\min x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 - 5x_5$$
$$\text{s.t.}$$
$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{4}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 5 \\ -\frac{1}{4}x_2 + 3x_3 - \frac{3}{4}x_4 + x_5 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

با به کارگیری روش سیمپلکس اصلاح شده در یکی از تکرارها به جدول زیر رسیده‌ایم که در آن x_6 و x_7 متغیرهای مصنوعی هستند و با فرض اینکه $X_B = \begin{pmatrix} x_6 \\ x_3 \end{pmatrix}$ باشد آنگاه:

x_6	x_7	RHS
۰	$-\frac{5}{3}M - \frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}M - \frac{25}{3}$
۱	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$

۱) x_4 واردشونده و x_3 خارج‌شونده است.
۲) x_1 واردشونده و x_3 خارج‌شونده است.
۳) x_1 واردشونده و x_7 خارج‌شونده است.
۴) x_4 واردشونده و x_6 خارج‌شونده است.

۱۳- جواب بهینه مسئله صفر و یک زیر چقدر است؟

$$\min 3x_1+4x_2+5x_3+7x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3+x_4\ge 6\\ x_1+4x_2+2x_3+x_4\ge 6\\ 3x_1+x_2+x_3+4x_4\ge 6\end{cases}$$
$$x_j=(0,1)$$

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۴- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، در خصوص شرایط KKT در یک مسأله حداقل‌سازی غیرخطی نادرست است؟

۱) شرط کافی KKT آن است که مجموعه محدودیت‌های مسئله باید مجموعه‌ای محدب باشد.
۲) شرط کافی KKT آن است که تابع هدف مسئله، باید مجموعه‌ای مقعر باشد.
۳) شرط لازم KKT آن است که شرایط دوگانگی (Complementary Slackness) در آن برقرار باشد.
۴) شرط لازم KKT آن است که بتوان گرادیان تابع هدف را بر اساس ترکیب خطی مثبت گرادیان محدودیت‌های عمل‌کننده نوشت.

۱۵- اگر (x_1^*,y_1^*) جواب مسئله $\begin{cases}\max: f_1(x,y)=\ln x+\ln y\\ \text{s.t}: \quad px+qy\le r\end{cases}$ باشد و (x_2^*,y_2^*) جواب مسئله $\begin{cases}\max: f_2(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}\\ \text{s.t}: \quad px+qy\le r\end{cases}$ باشد، آنگاه $\dfrac{x_1^*+y_1^*}{x_2^*+y_2^*}$ برابر است با:

۱) $\dfrac{(p+q)^2}{p^2+q^2}$ ۲) $\dfrac{(p^2+q^2)}{(p+q)^2}$ ۳) $\dfrac{2(p^2+q^2)}{(p+q)^2}$ ۴) $\dfrac{(p+q)^2}{2(p^2+q^2)}$

۱۶- یک تابع درجه دوم کامل با n متغیر را در نظر بگیرید. اگر x نقطه بهینه مینیمم‌سازی این تابع باشد. در این صورت چنانچه تابع .... باشد نقطه x منحصر به فرد است.

۱) محدب ۲) مقعر ۳) اکیداً محدب ۴) اکیداً مقعر

۱۷- تابع $f(x)=xe^{-x^2}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد تابع $f(x)$ صحیح است؟

۱) نقطه $+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ نقطه مینیمم مطلق تابع است.
۲) نقطه $+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ نقطه مینیمم مطلق تابع است.
۳) نقاط $+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ جزء نقاط اکسترمم تابع هستند.
۴) نقاط $+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ و $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ جزء نقاط اکسترمم تابع هستند.

۱۸- دو مدل برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z_2=2x_1+3x_2 \qquad \text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2\le 4\\ x_1+x_2=3\\ x_1 \text{ و } x_2 \text{ اعداد صحیح غیرمنفی هستند.}\end{cases}$$

$$\text{Max } z_1=2x_1+3x_2 \qquad \text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2\le 4\\ x_1+x_2=3\end{cases} \qquad x_1\ ,\ x_2\ge 0$$

بین مقادیر بهینه z_1 و z_2 چه رابطه‌ای برقرار است؟

۱) $\text{Max}z_1<\text{Max}z_2$ ۲) $\text{Max}z_1=\text{Max}z_2$ ۳) $\text{Max}z_1>\text{Max}z_2$ ۴) هیچ رابطه‌ای برقرار نیست.

۱۹- مسئله می‌نیمم کردن تابع هزینه زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } U = \text{Max.}\left\{x^۲(۰)+u^۲(۰);\frac{۱}{۱+\left|x(۱)+u(۱)\right|}+x^۲(۲)u^۲(۲)\left|\sqrt{x^۲(۳)+u^۲(۳)+x^۴(۴)u^۲(۴)}\right|\right\}$$

فرض کنید معادله پویای سیستم عبارت است از:

$$x(k+۱)=f_k\left[x(k),u(k)\right], k=۰,۱,۲,۳$$

اگر این مسئله را از برنامه‌ریزی پویا و با حرکت به عقب حل کنیم و از شرط کمکی زیر شروع کنیم:

$$I(x,۴)=\min_u\left\{x^۴u^۲\right\}$$

معادله تکراری مسأله برای مرحله $k=۲$ عبارت خواهد بود از:

۱) $I(x,۲)=\min_u\left\{x^۲u^۲\left|\sqrt{I(f_۲(x,u),۳)}\right|\right\}$

۲) $I(x,۲)=\min_u\left\{x^۲u^۲\left|I(f_۱(x,u),۲)\right|\right\}$

۳) $I(x,۲)=\min_u\left\{x^۲+u^۲\left|I(f_۲(x,u),۳)\right|\right\}$

۴) $I(x,۲)=\min_u\left\{x^۲+u^۲+I(f_۳(x,u),۴)\right\}$

۲۰- مدل برنامه‌ریزی با متغیرهای صحیح زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}
\max\quad & ۶۰x_۱+۴۰x_۲+۲۰x_۳\\
\text{s.t.}\quad & ۸x_۱+۶x_۲+x_۳\le ۴۸\\
& ۸x_۱+۴x_۲+۳x_۳\le ۴۰\\
& ۴x_۱+۳x_۲+x_۳\le ۱۶\\
& x_۱+x_۲+x_۳\ge ۰,\text{integer}
\end{aligned}$$

با اضافه کردن متغیرهای کمبود $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ به محدودیت‌ها و حل مدل خطی مربوطه، جدول نهایی آن عبارتست از:

$$\begin{aligned}
& z+۴x_۱ + ۸s_۲+۱۶s_۳=۲۸۸\\
& ۱/۶x_۱ + s_۱ +۱/۲s_۲-۵/۶s_۳=۲۷/۲\\
& ۱/۶x_۱+x_۳ +۱/۲s_۲-۱/۶s_۳=۱۱/۲\\
& ۰/۸x_۱+x_۲ -۰/۴s_۲+۱/۲s_۳=۱/۶
\end{aligned}$$

برای اولین محدودیتی که متغیر پایه آن مقدار اعشاری دارد، برش کسری گموری آن کدام محدودیت است؟

۱) $\frac{۳}{۵}x_۱+\frac{۱}{۵}s_۲-\frac{۳}{۵}s_۳\ge\frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۳}{۵}x_۱+\frac{۱}{۵}s_۲+\frac{۲}{۵}s_۳\ge\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۵}x_۱+\frac{۲}{۵}s_۲+\frac{۳}{۵}s_۳\ge\frac{۱}{۵}$

۴) $\frac{۳}{۵}x_۱+s_۱+\frac{۱}{۵}s_۲+\frac{۲}{۵}s_۳\ge ۲۷$

پاسخ سوالات کنکور سراسری صنایع صنایع سال ۹۰

۱- گزینه ۴)

واضح است که تابع هدف مساله به شکل $Minz = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ است (که می‌توان آن را به فرم $\sum_{i=1}^{3} a_i x_i$) نیز نوشت. برای مدلسازی محدودیت‌ها به نکات زیر توجه کنید:

I) x_1 می‌تواند مقادیر بین صفر تا ۴۰ را اختیار کند.

II) x_2 می‌تواند مقادیر صفر تا ۲۰ را اختیار کند و تنها در صورتی که $x_1 = 40$ باشد (یعنی $y_1 = 1$)باشد می‌تواند مقادیر بیشتر از صفر داشته باشد.

III) x_3 حد بالایی ندارد، اما تنها زمانی که $x_2 = 20$ و $x_1 = 40$ باشند می‌تواند مقدار بگیرد. از آنجایی که $x_2 = 20$ خود $x_1 = 40$ را الزام می‌کند، تنها زمانی که $y_2 = 1$ باشد. x_3 می‌تواند مقدار بیش از صفر داشته باشد.

این سه بند را می‌توان در محدودیت‌های زیر خلاصه کرد:

$$40y_1 \le x_1 \le 40$$
$$20y_2 \le x_2 \le 20y_1$$
$$x_3 \le My_2$$

دقت کنید چون x_3 حد بالایی ندارد متغیر y_3 مفهومی ندارد و در گزینه ۴ به جای y_3 باید y_2 لحاظ گردد.

۲- گزینه ۱)

محدودیت موردنظر به شکل کلی $T_Ax_A + T_Bx_B + T_Cx_C \le 40$ نوشته می‌شود که در آن T_i زمان لازم برای ساختن یک واحد از محصول i $(i = A, B, C)$ است که به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} T_A = 1 \\ T_B = 2 + 2T_A = 4 \\ T_C = 3 + T_B = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_A + 4x_B + 7x_C \le 40$$

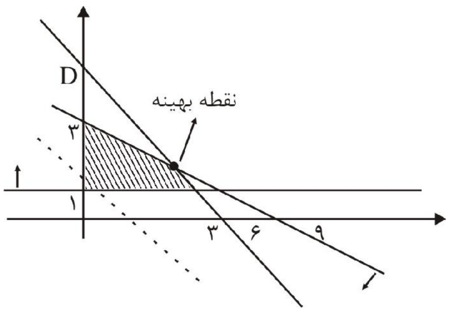
۳- گزینه ۲)

صورت سوال هم ارز است با این گزاره:

اگر ۲ یا ۱ $y_A + y_B =$ باشد، آنگاه y_C باید صفر باشد که تنها با گزینه ۲ سازگار است.

۴- گزینه ۱)

با استفاده از روش ترسیمی مشخص است که محل برخورد دو محدودیت اول و دوم نقطه بهینه است.



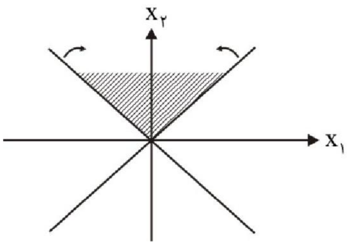
۵- گزینه ۴)

اگر $t > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = C_B B^{-1}.b \\ z_2 = C_B.B^{-1}.t.b \end{array}\right\} \Rightarrow z_2 = t.z_1$$

$t < 0$ اگر $\Rightarrow$ جواب بهینه (۱) یا (۲) ناموجه

۶- گزینه ۱)



$$x_2 \geq |x_1| \Rightarrow \begin{cases} x_2 \geq x_1 & x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq -x_1 & x_1 \leq 0 \end{cases}$$

در شکل واضح است که تنها نقطه گوشه‌ای مبدأ مختصات است.

۷- گزینه ۴)

$$z = C_B B^{-1}.b = (1+z), 0, 3-2\lambda \begin{bmatrix} 0/5 & 0 & -0/5 \\ -2/5 & 1 & 1/5 \\ 0/5 & 0 & 0/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8+\lambda \\ 26+\lambda \\ 4+\lambda \end{bmatrix} = -2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0/5 \to z = 17 \\ \lambda = 0 \to z = 20 \\ \lambda = -0/4 \to z = 2/68 \\ \lambda = -1/25 \to z = 23/125 \end{cases}$$

$$z_1 - c_1 = C_B B^{-1} a_1 - c_1 = (1+2\lambda, 0, 3-2\lambda) \begin{bmatrix} 0/5 \\ -2/5 \\ 0/5 \end{bmatrix} - 0 = 2 \geq 0$$

$$z_2 - c_2 = C_B B^{-1} a_2 - c_2 = (1+2\lambda, 0, 3-2\lambda) \begin{bmatrix} -0/5 \\ 1/5 \\ 0/5 \end{bmatrix} = -0/5 - \lambda - 1/5 - \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq 0/5$$

$$B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 6+\lambda \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 6$$

$\Rightarrow -6 \leq \lambda \leq 0/5 \Rightarrow \lambda = -1/25$ موجه است.

۸- گزینه ۳)

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

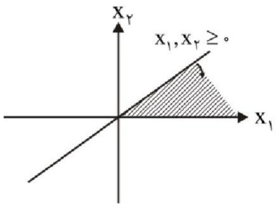
گزینه ۱:

$\left.\begin{array}{l} x_2 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$ ناسازگار $\Rightarrow$ جواب شدنی وجود ندارد.

گزینه ۲:

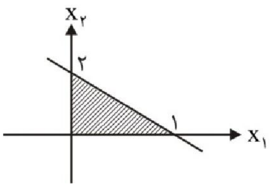
$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$ ناسازگار $\Rightarrow$ مساله جواب شدنی ندارد.

گزینه ۳:



$$\left.\begin{array}{l} x_2 \le x_1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

گزینه ۴:



$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

۹- گزینه ۳)

p_1 و p_2 مسائل اولیه و دوگان یکدیگر هستند. هم p_1 و p_2 شدنی هستند:

$x = 0 \Rightarrow p_1$ جواب شدنی

$u = 0 \Rightarrow p_2$ جواب شدنی

چون هر دو مساله شدنی هستند بنابراین هر دو دارای جواب بهینه محدود هستند.

۱۰- گزینه ۱)

$\frac{2}{m+n} = \frac{2m \times n}{mn(m+n)} = \frac{\text{تعداد عناصر غیر صفر ماتریس}}{\text{تعداد عناصر ماتریس}} =$ چگالی ماتریس (در صورت سوال اشتباه تعریف شده است.)

۱۱- گزینه ۳ صحیحاست.

۱۲- هیچ‌کدام

$$z_1c_1 = (0, -\frac{7}{3})\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1 < 0$$

$$z_2c_2 = (0, -\frac{7}{3})\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} - 6 = \frac{7}{12} - 6 < 0$$

$$z_4c_4 = (0, -\frac{7}{3})\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} - 1 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$$

$$z_5 - c_5 = (0, -\frac{7}{3})\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-5) = 5 - \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{واردشونده}$$

۱۳- گزینه ۳)

از متغیر با کمترین ضریب در تابع هدف شروع کرده و به آن مقدار یک می‌دهیم تا مساله شدنی شود. ملاحظه می‌شود که هر چهار متغیر مقدار یک گرفتند: اما با قرار دادن $x_3 = 0$ همچنان مساله شدنی می‌ماند و $z = 14$ خواهد بود. مساوی صفر قرار دادن هر متغیر دیگری به جای x_3 منجر به غیر موجه شدن جواب می‌شد. بعد از x_3 نیز صفر قرار دادن هر متغیری جواب را ناموجه می‌کند.

۱۴- گزینه ۲)

برای حداقل‌سازی تابع هدف باید محدب باشد.

۱۵- گزینه ۴)

اگر $r \neq 0$ باشد داریم:

$$\text{شرایط k.k.T برای مساله (1)} \Rightarrow \begin{cases} \nabla f_1 = \lambda_1 \nabla g_1 \\ \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda_1 (p,q) \Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \\ \lambda_1 (px + qy - r) = 0 \end{cases} \Rightarrow px + qy = r$$

$$\text{شرایط k.k.T برای مساله (2)} \Rightarrow \begin{cases} \nabla f_2 = \lambda'_1 \nabla g_1 \\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \lambda'_1 (p,q) \Rightarrow \lambda'_1 \neq 0 \\ \lambda'_1 (px + qy - r) = 0 \end{cases} \Rightarrow px + qy = r$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} = \lambda_1 p \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda_1 p} \\ \frac{1}{y} = \lambda_1 q = y = \frac{1}{\lambda_1 q} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{\lambda_1} = r \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{r}$$

$$x = \frac{1}{\lambda_1 p} \Rightarrow x_1 = \frac{r}{2p}$$

$$y = \frac{1}{\lambda_1 q} \Rightarrow y_1 = \frac{r}{2q}$$

به همین ترتیب با حل k.k.T مساله (۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lambda'_1 p \Rightarrow x = \frac{1}{4\lambda_1'^2 p_2} \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} = \lambda'_1 q \Rightarrow y = \frac{1}{4\lambda_1'^2 q_2} \end{array}\right\} \Rightarrow p\left(\frac{1}{4\lambda_1'^2 p^2}\right) + q\left(\frac{1}{4\lambda_1'^2 . q^2}\right) = r \Rightarrow \frac{1}{\lambda'^2} = \frac{4pqr}{p+q}$$

$$px + qy = r$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{qr}{p^2 + pq} \quad , \quad y_2 = \frac{pr}{q^2 + pq}$$

$$\frac{x_1 + y_1}{x_2 + y_2} = \frac{\frac{r}{2p} + \frac{r}{2q}}{\frac{qr}{p^2 + pq} + \frac{pr}{q^2 + pq}} = \frac{\frac{p+q}{2pq}}{\frac{q(q^2 + pq) + p(p^2 + pq)}{(p^2 + pq)(q^2 + pq)}} = \frac{\frac{p+q}{2pq}}{\frac{a^3 + pq^3 + p^3 + p^3 . q}{pq(p+q)p+q}}$$

$$= \frac{\frac{p+q}{2}}{\frac{q^2(p+q) + p^2(q+p)}{(p+q)^2}} = \frac{\frac{p+q}{2}}{\frac{(p^2 + q^2)(p+q)}{(p+q)^2}} = \frac{(p+q)^2}{2(p^2 + q^2)}$$

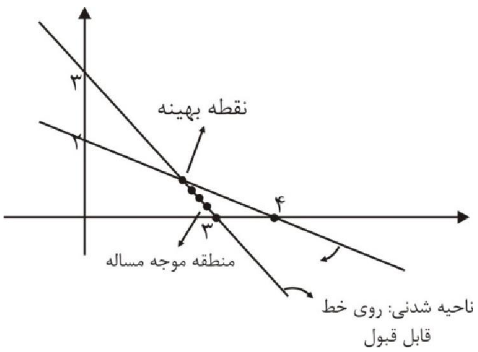
۱۶- گزینه ۳)

۱۷- هیچ‌کدام

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^{-x^3}+(-3x^2)e^{-x^3}=[1-3x^2]xe^{-x^3}=0 \Rightarrow 3x^3=1 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

۱۸- گزینه ۲)

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2=4 \\ x_1+x_2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=2\,,\,x_2=1$$



x_1 و x_2 در شرایط مساله دوم صدق می‌کنند $\Leftarrow$ $z_1=z_2$

۱۹- گزینه ۱)

۲۰- گزینه ۲)

$$\bar{b}_1=27/2 \quad , \quad I_1=27 \quad , \quad f_1=0/2$$

$$y_{11}=1/6 \quad , \quad I_{11}=1 \quad , \quad f_{11}=0/6$$

$$y_{1s_2}=1/2 \quad , \quad I_{1s_2}=1 \quad , \quad f_{1s_2}=0/2$$

$$y_{1s_3}=-5/6 \quad , \quad I_{1s_3}=-6 \quad , \quad f_{1s_3}=0/4$$

$$f_1-(f_{11}x_1+f_{1s_2}s_2+f_{1s_3}s_3)\leq 0$$

$$0/2-(0/6x_1+0/25s_2+0/4s_3)\leq 0$$

$$0/6x_1+0/2s_2+0/45s_3 \geq 0/2 \simeq \frac{3}{5}x_1+\frac{1}{s}s_2+\frac{2}{5}s_3 \geq \frac{1}{s}$$

سوالات چهارگزینه‌ای کنکور سراسری صنایع سیستم سال ۹۰

۱- ماتریس $B=[\underset{\sim}{a}_۱,\underset{\sim}{a}_۲,\underset{\sim}{a}_۳]$ را در نظر گرفته و تعیین کنید کدام‌یک از موارد زیر پایه <u>نیست</u>؟

۱) $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۵ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$
۲) $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$
۳) $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$
۴) $B=\begin{bmatrix} ۲/۵ & ۳ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۲ \\ ۵ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$

۲- مجموعه $S=\{x\in R^۳ \mid x_i \le ۱, i=۱,۲,۳\}$ دارای چند نقطه گوشه موجه است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۵
۴) ۸

۳- دو مساله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$z_۱ = \text{Min} f(x_۱,\dots,x_n) \qquad z_۲ = \text{Min} f(x_۱,\dots,x_n)$$
$$\text{s.t.} \sum_{i=۱}^{n} P_i x_i \le E_i \qquad \text{s.t.} \sum_{i=۱}^{n} P_i x_i \le E_۲$$
$$(۱) \qquad\qquad (۲)$$

اگر $E_۲ > E_۱$ باشد، آنگاه:

۱) $z_۲ < z_۱$
۲) $z_۲ \le z_۱$
۳) $z_۲ \le z_۱$
۴) $z_۲ \le z_۱$

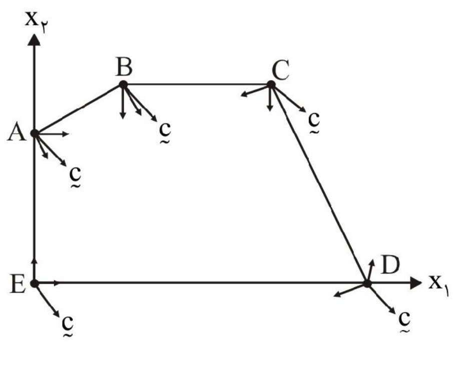
۴- مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } cx$$
$$\text{s.t. } Ax \le b$$
$$x \ge ۰$$

اگر برای $c=c_۱$، $x_۱$ جواب بهینه مساله بالا باید و برای $c=c_۲$، $x_۲$ جواب بهینه مساله بالا باشد، آنگاه:

۱) $(c_۱-c_۲)(x_۱-x_۲)\le ۰$
۲) $(c_۱-c_۲)(x_۱-x_۲)= ۰$
۳) $(c_۱-c_۲)(x_۱-x_۲)\ge ۰$
۴) $(c_۲-c_۱)(x_۱x_۲)\ge ۰$

۵- در شکل زیر کدام پاسخ، نقطه بهینه یک مساله حداکثرسازی است؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

۶- در یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی که در آن تمام متغیرها صفر و یک هستند به محدودیت زیر برخوردیم که حداقل یکی از متغیرهای $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ نیز صفر شود $\quad x_۱=۰ \quad\Rightarrow$

در این صورت کدام‌یک از دسته محدودیت‌های زیر معادل رابطه منطقی فوق است که در آن y نیز یک متغیر صفر و یک است:

۱) $x_۲+x_۳+x_۴ \le ۲y$, $x_۱ \ge ۳(۱-y)$
۲) $x_۲+x_۳+x_۴ \ge ۲y$, $x_۱ \ge ۳(۱-y)$
۳) $x_۲+x_۳+x_۴ \le ۳y$, $x_۱ \le ۳(۱-y)$
۴) $x_۲+x_۳+x_۴ \ge ۳y$, $x_۱ \le ۳(۱-y)$

۷- اگر در یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح امکان انتخاب یکی از دو محدودیت $x_1 \geq 100$ یا $x_1 \leq 0$ باشد، کدام‌یک از حالت‌های زیر بیانگر این وضعیت است؟

۱) $\begin{cases} x_1 \leq My \\ 100 + x_1 \leq M(1-y) \\ y = 0 \text{ یا } 1 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x_1 \geq My \\ 100 + x_1 \geq M(1-y) \\ y = 0 \text{ یا } 1 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x_1 \leq My \\ 100 - x_1 \leq M(1-y) \\ y = 0 \text{ یا } 1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x_1 \leq My \\ 100 - x_1 \geq M(1-y) \\ y = 0 \text{ یا } 1 \end{cases}$

۸- ایستگاه اورژانس تهران در چهار شیفت روزانه خود به حداقل افراد زیر نیازمند است. افراد این ایستگاه می‌توانند ۱۲ ساعت و یا ۱۸ ساعت متوالی کار کنند. اگر x_i و y_i را تعداد افرادی بدانیم که قرار است به ترتیب ۱۲ ساعت و یا ۱۸ ساعت کار کرده و کار خود را از شیفت i شروع کنند در این صورت کدام محدودیت زیر در مدل‌سازی مساله موجود است؟

شیفت	ساعت کاری	نفرات مورد نیاز
۱	۱۲ شب ـ ۶ صبح	۱۲
۲	۶ صبح ـ ۱۲ ظهر	۸
۳	۱۲ ظهر ـ ۶ عصر	۶
۴	۶ عصر ـ ۱۲ شب	۱۵

۱) $x_2 + x_3 + y_3 + y_1 + y_2 \geq 6$
۲) $x_1 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \geq 8$
۳) $x_1 + x_2 + x_3 + y_2 + y_3 \geq 12$
۴) $x_2 + x_4 + y_1 + y_4 + y_3 \geq 15$

۹- ماتریس هزینه مساله تخصیص زیر را با هدف حداقل کردن تابع هدف در نظر بگیرید. مقدار بهینه تابع هدف کدام است؟

$$\begin{pmatrix} 10 & 17 & 27 & 30 & 40 \\ 50 & 40 & 30 & 25 & 35 \\ 60 & 80 & 40 & 50 & 60 \\ 50 & 30 & 90 & 60 & 0 \\ 80 & 70 & 50 & 60 & 40 \end{pmatrix}$$

۱) کوچکتر یا مساوی ۹۵ است.
۲) برابر ۱۳۰ می‌باشد.
۳) بزرگتر یا مساوی ۱۴۰ می‌باشد.
۴) برابر ۱۲۴ می‌باشد.

۱۰- در صورتی که در مساله حمل و نقل $(c_{ij} - u_j - v_j)$ برای بعضی از متغیرهای غیرپایه‌ای در وضعیت بهینگی صفر باشد، در آن صورت:

۱) مساله حتماً تباهیده است.
۲) مساله دارای جوای بهینه چندگانه است.
۳) مساله حتماً تباهیده و دارای جواب بهینه است.
۴) مساله دارای جواب بیکران است.

۱۱- در یک حل امکان‌پذیر در یک مدل حمل و نقل متوازن با m نقطه عرض و n نقطه تقاضا به تعداد .... متغیر دارای مقدار .... می‌باشد.

۱) $(m+n-1)$، مثبت
۲) $(m+n-1)$، غیرمنفی
۳) حداکثر $(m \times n)$، مثبت
۴) حداکثر $(m+n-1)$، غیرمنفی

۱۲- هر مساله تخصیص قابل تبدیل به مدل حم و نقل .... و هر مدل حمل و نقل قابل تبدیل به مساله تخصیص ....

۱) است، نیست
۲) نیست، نیست
۳) است، است
۴) نیست، است

۱۳- مساله:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } x_0 = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\
&2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

که جدول بهینه آن به صورت زیر است:

	x_0	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	RHS
x_0	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5}+M$	$\frac{281}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

در صورتی که مقادیر سمت راست از $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ تغییر یابند، در جواب بهینه چه تغییری به وجود می‌آید؟

۱) پایه بهینه و مقادیر بهینه تغییر نمی‌کند.

۲) پایه بهینه تغییر می‌کند و به $\begin{pmatrix}x_3\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\ \frac{11}{5}\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.

۳) پایه بهینه تغییر نمی‌کند ولی مقادیر بهینه به $\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{5}\\ \frac{9}{5}\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.

۴) پایه بهینه تغییر نمی‌کند، ولی مقادیر بهینه به $\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\ \frac{11}{5}\end{pmatrix}$ تغییر می‌یابد.

۱۴- اگر مقادیر بهینه متغیرهای دوگان (dual variables) از یک مساله بیشینه‌سازی به ترتیب از چپ به راست به صورت $(9,3,1,0)$ باشد و مجبور باشیم فقط یک واحد از یکی از چهار منبع را نسبت به قبل اضافه‌تر نماییم، مناسب‌ترین تصمیم کدام است؟

۱) تهیه از منبع یکم ۲) تهیه از منبع دوم ۳) تهیه از منبع سوم ۴) تهیه از منبع چهارم

۱۵- برنامه خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 500x_1 + 450x_2 \\
&\text{S.t.}\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 60 \\ 10x_1 + 20x_2 \le 150 \\ x_1 \le 8 \\ x_i \ge 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \end{cases}
\end{aligned}$$

شبه قیمت‌ها (shadow-prices) محدودیت اول و سوم چیست؟

۱) ۱۰ و ۰/۵ ۲) $78\frac{4}{8}$ و ۱۰ ۳) ۱۰ و $78\frac{4}{7}$ ۴) $78\frac{4}{7}$ و ۰

۱۶- در مساله ۱۵ هزینه‌های تعلیل یافته (Reduced Costs) متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ چقدر است؟

۱) ۰ و ۰ ۲) ۰ و ۱۰ ۳) $۲\frac{۶}{۷}$ و ۰ ۴) ۱۰ و $۲\frac{۶}{۷}$

۱۷- در مساله ۱۵ حدود تغییرات ضرایب تابع هدف چیست؟

۱) $\begin{cases} ۲۰۰ \le c_۱ \le ۵۰۰ \\ ۴۱۶\frac{۲}{۳} \le c_۲ \le ۱۰۰۰ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} ۲۰۰ \le c_۱ \le ۶۰۰ \\ ۱۰۰ \le c_۲ \le ۷۰۰ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} ۲۲۵ \le c_۱ \le ۵۴۰ \\ ۴۱۶\frac{۲}{۳} \le c_۲ \le ۱۰۰۰ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} ۲۰۰ \le c_۱ \le ۷۰۰ \\ ۱۰۰ \le c_۲ \le ۷۰۰ \end{cases}$

۱۸- دو مدل برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Min } z_۱ = ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳$$
$$\text{S.t.} \begin{cases} x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ \ge ۷ \\ ۲x_۱ + x_۲ + x_۴ \ge ۱۰ \\ x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \ge ۰ \end{cases}$$

$$\text{Min } z_۲ = ۳x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳$$
$$\text{S.t.} \begin{cases} x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ \ge ۷ \\ ۲x_۱ + x_۲ + x_۴ \ge ۱۰ \\ x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \ge ۰ \text{ اعداد صحیح غیر منفی هستند.} \end{cases}$$

بین مقادیر بهینه $Z_۱$ و $Z_۲$ چه رابطه‌ای برقرار است؟

۱) $\text{Min } Z_۱ < \text{Min } Z_۲$ ۲) $\text{Min } Z_۱ = \text{Min } Z_۲$
۳) $\text{Min } Z_۱ > \text{Min } Z_۲$ ۴) $Z_۱ \times Z_۲ = ۰$

۱۹- در یک مساله برنامه‌ریزی خطی با سه متغیر اصلی $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ دو محدودیت اصلی $\le$ که در آن $S_۱$ و $S_۲$ متغیرهای کمکی (Slack) این محدودیت‌ها هستند جدول نهایی به صورت زیر به‌دست آمده است:

	z	$x_۱$	$S_۱$	$S_۲$	RHS
z	۱	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۱۵
$x_۳$	۰	-۱	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۱
$x_۲$	۰	۲	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۲

در این صورت اگر مقدار سمت راست اولین محدودیت اصلی دو واحد زیاد شود مقدار بهینه متغیر $x_۲$ چه تغییری خواهد کرد؟

۱) یک واحد کم می‌شود. ۲) یک واحد زیاد می‌شود.
۳) دو واحد زیاد می‌شود. ۴) تغییر نمی‌کند.

۲۰- در سوال قبل اگر ضریب متغیر $x_۱$ را در تابع هدف بخواهیم تغییر دهیم تا جدول ارائه شده بهینه نبوده و $x_۱$ بتواند وارد پایه شود در این صورت حداقل مقدار تغییر چقدر باید باشد؟

۱) کمتر از یک واحد کم شود. ۲) بیشتر از یک واحد زیاد شود.
۳) کمتر از سه واحد کم شود. ۴) بیشتر از سه واحد زیاد شود.

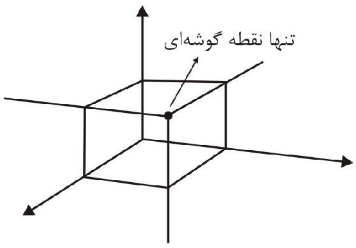
پاسخ سوالات کنکور سراسری صنایع سیستم سال ۹۰

۱- گزینه ۱)

$$|B| = \begin{vmatrix} ۲/۵ & ۳ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۲ \\ ۵ & ۵ & ۰ \end{vmatrix} = ۰+۳۰-۱۵+۱۰-۲۵=۰ \quad \Rightarrow \quad$$ B پایه نیست.

۲- گزینه ۲)

تنها نقطه گوشه‌ای $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,1)$ است.



۳- گزینه ۲)

چون $E_2 > E_1$ است، تابع هدف بدتر نخواهد شد یعنی: $z_2 \le z_1$

۴- گزینه ۴)

مساله (۲): $\text{Min } c_2 n$ ، $Ax \le b$ ، $x \ge 0$

مساله (۱): $\text{Min } c_1 x$ ، $Ax \le b$ ، $x \ge 0$

واضح است که x_1 و x_2 هر دو در محدودیت‌ها صدق می‌کنند:

x_1 برای مساله (۲) شدنی است.

x_2 برای مساله (۱) شدنی است.

x_1 بهینه مساله (۱) و شدن مساله (۲): $\Rightarrow c_1x_1 \le c_1x_2$

x_2 بهینه مساله (۲) و شدن مساله (۱): $\Rightarrow c_2x_2 \le c_2x_1$

$$\left.\begin{array}{l} c_1x_1 \le c_1x_2 \\ c_2x_2 \le c_2x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1x_1 + c_2x_2 \le c_2x_1 + c_1x_2$$

$$\Rightarrow c_1x_1 - c_1x_2 \le c_2x_1 - c_2x_2 \Rightarrow c_1(x_1 - x_2) \le c_2(x_1 - x_2) \Rightarrow (c_1 - c_2)(x_1 - x_2) \le 0$$

۵- گزینه ۱)

روش اول: با رسم تابع هدف و حرکت آن در جهت بیشتر شدن نقطه بهینه را می‌یابیم.

روش دوم: چون مساله حداکثرسازی است، بردار گرادیان محدودیت‌ها را درخلاف جهت (خلاف جهتی که رسم شده است) رسم می‌کنیم. بردار گرادیان تابع هدف در نقطه D درون مخروط حاصل قرار می‌گیرد. بنابراین نقطه D بهینه است.

۶- هیچ‌کدام

صورت سوال معادل شرایط زیر است:

i) اگر $x_1 = 0$ باشد، حداقل یکی از x_2 یا x_3 یا x_4 نیز صفر شوند.

ii) اگر $x_1 = 1$ باشد، حداقل x_2 ، x_3 و x_4 می‌توانند هر مقداری (۰ یا ۱) داشته باشند.

هیچ‌کدام از گزینه‌ها شرایط فوق را ندارند.

۷- گزینه ۱)

$$\begin{cases} y=۰ & \Rightarrow \quad x_۱ \le ۰ \\ y=۱ & \Rightarrow \quad x_۱ \ge ۱۰۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ \le My \\ x_۱ \ge ۱۰۰-M(۱-y) \end{cases}$$

۸- گزینه ۴)

تعداد نفرات شیفت ۱ $= x_۱ + y_۱ + y_۳ + x_۴ + y_۴ \ge ۱۲$

تعداد نفرات شیفت ۲ $= x_۲ + y_۲ + x_۱ + y_۱ + y_۴ \ge ۸$

تعداد نفرات شیفت ۳ $= x_۳ + y_۳ + x_۲ + y_۲ + y_۱ \ge ۶$

تعداد نفرات شیفت ۴ $= x_۴ + y_۴ + x_۳ + y_۳ + y_۲ \ge ۱۵$

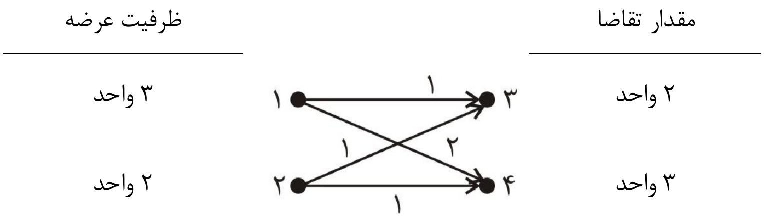
۹- گزینه ۳)

۱۰- هیچ‌کدام

چون در مساله در بهینگی به ازای چندین متغیر غیرپایه‌ای $z_j - c_j = ۰$ است (یعنی همواره حداقل یـک درجـه تباهیـدگی وجـود دارد) و از طرف دیگر تضمینی برای غیرصفر بودن تست مینیمم نسبت وجود ندارد، بنابراین نمی‌توان گفت مساله جواب بهینه چندگانه دارد.

۱۱- گزینه ۳)

در صورت سوال به بهینگی اشاره‌ای نشده است و تنها شدن بودن جواب مورد نظر بوده است. به عنوان مثال در گراف زیر از تمام نقاط عرضه بـه تمام نقاط تقاضا کالا حمل شده است.



۱۲- گزینه ۳)

۱۳- گزینه ۱)

$$B^{-۱}.b' = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۲}{۵} \\ \frac{۱۱}{۵} \end{bmatrix} \ge ۰ \quad \Rightarrow$$ جواب بهینه تغییر نمی‌کند.

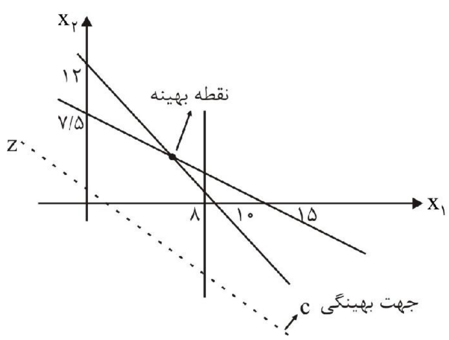
۱۴- گزینه ۴)

با توجه به تعبیر مقادیر بهینه مساله دوگان چون مقدار $u_۱$ از همه بیشتر است در مساله اولیه افزایش یک واحد به منبع اول بیـشترین تـأثیر را بر تابع هدف دارد.

۱۵- گزینه ۱)

محدودیت سوم طبق شکل در نقطه بهینه فعال نیست $\Leftarrow \quad y_۳ = ۰$

پس تنها گزینه اول صحیح است.

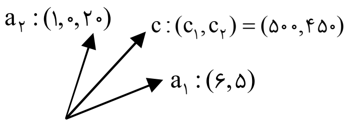


۱۶- گزینه ۴)

چون $x_۱$ و $x_۲$ در بهینگی در پایه هستند $\Leftarrow$ $z_۱ - c_۱ = z_۲ - c_۲ = ۰$

۱۷- گزینه ۳)

برای بهینه ماندن جواب فعلی بردار c باید همچنان درون مخروط حاصل از بردار گرادیان دو محدودیت اول و دوم قرار گیرد.



$$\frac{c_۱}{۶} \le \frac{۴۵۰}{۵} \quad \Rightarrow \quad c_۱ \le ۴۵۰$$

$$\frac{c_۱}{۱۰} \ge \frac{۴۵۰}{۲۰} \quad \Rightarrow \quad c_۱ \ge ۲۲۵$$

$$\frac{c_۲}{۵} \le \frac{۵۰۰}{۶} \quad \Rightarrow \quad c_۲ \ge ۴۱۶\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{c_۲}{۲۰} \ge \frac{۵۰۰}{۱۰} \quad \Rightarrow \quad c_۲ \le ۱۰۰۰$$

۱۸- گزینه ۴)

۱۹- گزینه ۱)

$$B^{-۱}.b' = B^{-۱}\begin{bmatrix} b_۱ + ۲ \\ b_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x'_۲ = x_۲ - ۱$$

۲۰- گزینه ۱)

$$(z'_۱ - c'_۱) = (z_۱ - c_۱) + (c_۱ - (c_۱ + \Delta c_۱)) \le ۰ \quad \Rightarrow \quad z_۱ - c_۱ - \Delta c \le ۰ \quad \Rightarrow \quad z_۱ - c_۱ \le \Delta c \quad \Rightarrow \quad ۳ \le \Delta c$$

سوالات کنکور سراسری صنایع صنایع سال ۹۱

۱- دو مساله P و P' را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$P: \min cx \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

$$P': \min cx \quad Ax = b' \quad x \geq 0$$

اگر مساله P دارای جواب بهینه متناهی باشد آن‌گاه مساله P' ....

۱) حتما نشدنی است.
۲) می‌تواند نشدنی باشد.
۳) حتما جواب بهینه متناهی دارد.
۴) می‌تواند جواب بهینه نامتناهی داشته باشد.

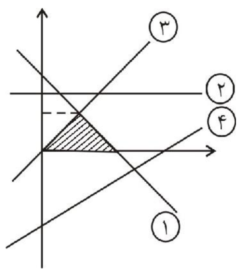
۲- مساله LP زیر را در نظر بگیرید:

$$P: \min cx \quad Ax = b \quad x \geq 0$$

با فرض اینکه A یک ماتریس $m \times m$ بوده و $c = b^t$ و $A = A^t$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) دوگان مساله P حتما شدنی است.
۲) مساله P حتما جواب بهینه متناهی دارد.
۳) هر جواب شدنی مساله P جواب بهینه است.
۴) مساله P می‌تواند جواب بهینه نامتناهی داشته باشد.

۳- فرض کنید یک مساله LP که شکل آن به‌صورت زیر است در حال حل با روش سیمپلکس است. اگر از نقطه $(4,0)$ بخواهیم به تکرار بعد برویم و متغیر x_2 واردشونده به پایه باشد. کدام‌یک از مقادیر زیر جزو مقادیر حاصل از انجام تست نسبت بـرای تغییر متغیر خارج‌شونده نمی‌باشد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴- اگر مساله غیرخطی زیر را با روش برنامه‌ریزی پویا حل کنیم تا مقدار بهینه متغیرهـای تـصمیم بـه‌دسـت آیـد، آن‌گـاه در صورتی‌که در مرحله دوم این روش مقدار باقیمانده از سمت راست محدودیت برابر s_2 باشد، مقدار بهینه x_2 چقدر است؟

$$\min z = 8x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_3^2$$
$$\text{s.t.}$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

۱) صفر
۲) $\frac{4}{33}s_2$
۳) $\frac{4}{18}s_2$
۴) s_2

۵- کدام گزینه معادل خطی مدل زیر است؟ که در آن M یک عدد بسیار بزرگ مثبت و $\forall i: x_i \geq ۰$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}&\text{Min } z = |۳x_۱ - ۲x_۲| + ۳x_۳\\&(x_۱ - ۲x_۲ \leq ۹ \quad \text{یا} \quad ۲x_۲ + ۴x_۳ \leq ۱۵)\\&x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰\end{aligned}$$

۱) $$\begin{aligned}&\text{Min } z = -۳x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳\\&\text{s.t.}\\&۱)\, x_۱ - ۲x_۲ \leq ۹ + M\delta\\&۲)\, ۲x_۱ + ۴x_۳ \leq ۱۵ + M(۱-\delta)\\&۳)\, \delta = ۰,۱\end{aligned}$$

۲) $$\begin{aligned}&\text{Min } z = ۳x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳\\&\text{s.t.}\\&۱)\, x_۱ - ۲x_۲ \leq ۹ + M\delta\\&۲)\, ۲x_۲ + ۴x_۳ \leq ۱۵ + M(۱-\delta)\\&۳)\, \delta = ۰,۱\end{aligned}$$

۳) $$\begin{aligned}&\text{Min } z = y + ۳x_۳\\&\text{s.t.}\\&۱)\, y \geq ۳x_۱ - ۲x_۲\\&۲)\, y \geq -۳x_۱ + ۲x_۲\\&۳)\, x_۱ - ۲x_۲ \leq ۹ + M\delta\\&۴)\, ۲x_۲ + ۴x_۳ \leq ۱۵ + M(۱-\delta)\\&۵)\, \delta = ۰,۱,\ y \geq ۰\end{aligned}$$

۴) $$\begin{aligned}&\text{Min } z = y + ۳x_۳\\&\text{s.t.}\\&۱)\, y \leq ۳x_۱ - ۲x_۲ + M\delta\\&۲)\, y \leq -۳x_۱ + ۲x_۲ + M(۱-\delta)\\&۳)\, x_۱ - ۲x_۲ \leq ۹ + M\delta\\&۴)\, ۲x_۲ + ۴x_۳ \leq ۱۵ + M\delta_۲\\&۵)\, \delta_۱ + \delta_۲ \leq ۱\\&۶)\, \delta, \delta_۱, \delta_۲ = ۰,۱,\ y \geq ۰\end{aligned}$$

۶- در حل یک مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح با روش شاخه و کران $(B\&B)$ از روش پسگردی $(LIFO)$ جهت انجام شاخه‌سازی استفاده می‌کنیم. در این‌صورت شاخه‌سازی بروی .... گره‌ایی که در درخت $B\&B$ تولید شده اما پیموده .... است انجام می‌شود. به ترتیب در مکان‌های خالی چه گزینه‌ایی باید نوشته شود؟

۱) آخرین، شده ۲) آخرین، نشده ۳) اولین، شده ۴) اولین، نشده

۷- در نقطه بهینه مقدار $x_۱$ کدام است؟

$$\begin{aligned}\text{Min } f(x) = -۶x_۱ - ۴x_۲ + x_۱^۲ + x_۲^۲&\\-x_۱ + x_۲ &\leq ۲\\x_۱ + x_۲ &\leq ۶\\x_۱ \quad &\leq ۵\\-x_۲ &\leq ۰\\-x_۱ \quad &\leq ۱\end{aligned}$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸- مساله برنامه‌ریزی ریاضی زیر مفروض است که در آن a و b و c پارامترهایی مثبت می‌باشند.

$$\begin{aligned} & z_1 = \text{Max Min}(x_1, x_2) \\ \text{s.t.} \quad & ax_1 + bx_2 = c \\ & x_1 ,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

آن‌گاه اندازه z_1 چقدر است؟

۱) $\frac{c}{ab}$ ۲) $\frac{c}{a+b}$ ۳) $\frac{c\,a\,b}{(a+b)}$ ۴) $\frac{c(a+b)}{ab}$

۹- مجموعه قابل قبول تعریف شده به وسیله محدودیت‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

تعداد نقاط فرین (Extneme Points) این مجموعه چند است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰- جواب بهینه مساله زیر در هنگام حل مساله به‌صورت برنامه‌ریزی خطی به‌صورت $x_1^* = 4\frac{1}{2}$, $x_2^* = 3\frac{1}{2}$, $z^* = 44\frac{1}{2}$ است.
اگر ردیف مربوط به متغیر x_2 جهت تولید برش انتخاب شود نامعادله برش مربوطه کدام است؟

$$\begin{aligned} & \text{Max } z = 7x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & 7x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 35 \\ & x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0 , \text{Int} \end{aligned}$$

۱) $x_2 \leq 3$ ۲) $x_2 \geq 4$ ۳) $x_1 + x_2 \geq 4$ ۴) $x_1 + x_2 \leq 7$

۱۱- از روش سیمپلکس تجدید نظر شده در مقایسه با روش سیمپلکس هنگامی استفاده می‌کنیم که چگالی ماتریس ضرائب .... و تعداد متغیرها .... از تعداد محدودیت‌ها باشند. به ترتیب در محل‌های خالی از چه کلماتی باید استفاده نمود؟

۱) بزرگ، بسیار کمتر ۲) بزرگ، بسیار بیشتر ۳) کوچک، بسیار کمتر ۴) کوچک، بسیار بیشتر

۱۲- اگر A، B و C سه آلترناتیو باشند که می‌توانند انجام شوند و یا انجام نشوند و y_A و y_B و y_C متغیرهای صفر و یک مربوط به انجام و یا عدم انجام آن‌ها باشد. اگر قرار باشد که اگر A یا B انتخاب شود C حتما انتخاب نشود، کدام‌یک از موارد زیر صحیح است؟

۱) $y_A + y_B \leq 1 + y_C$
۲) $y_A + y_B \leq 2(1 - y_C)$
۳) $y_A - y_B \leq 2(1 + y_C)$
۴) $y_A + y_B \leq 2(1 + y_C)$

۱۳- روش عددی قدم به قدم زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{k+1}=\frac{۲^{x_k}\left(x_k \ln ۲-۱\right)+\sin x_k-x_k \cos x_k}{۲^{x_k}\ln ۲-\cos x_k}$$

این رابطه حاصل استفاده از کدام روش می‌باشد؟

۱) نیوتن – رافسون برای حل معادله $۲^x-\sin x=۰$

۲) نیوتن- رافسون برای مینیمم کردن تابع $f(x)=۲^x-\sin x$

۳) سریع‌ترین نزول برای مینیمم کردن تابع $f(x)=۲^x+\sin x$

۴) سریع‌ترین نزول برای مینیمم کردن تابع $f(x)=\frac{۱}{\ln ۲}۲^x+\cos x$

۱۴- دو مساله برنامه ریزی ریاضی ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که در آن $U(x_۱,x_۲)$ یک تابع غیرخطی است.

$$z_۱=\text{Max }U(x_۱,x_۲)\quad \text{s.t.}\quad \begin{cases}۳x_۱+۴x_۲\le ۱۵\\ x\ ,\ x_۲\ge ۰\end{cases}\qquad ①$$

$$z_۲=\text{Max }U(x_۱,x_۲)\quad \text{s.t.}\quad \begin{cases}۴x_۱+۵x_۲\le ۱۵\\ x\ ,\ x_۲\ge ۰\end{cases}\qquad ②$$

کدام رابطه زیر صحیح است؟

۱) $z_۱\ge z_۲$

۲) $z_۱\le z_۲$

۳) $\frac{z_۱-z_۲}{z_۱+z_۲}\le\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{z_۱+z_۲}{z_۱-z_۲}\ge\frac{۱}{۲}$

۱۵- در مساله برنامه‌ریزی درجه دوم پارامتری

$$\text{Min}\left\{(c+tq)'\,x+\frac{۱}{۲}x'Cx \mid A\bar{x}=b+tp\right\}$$

که در آن q و p به ترتیب بردارهای هم بعد با c و b است و t پارامتر مساله است و C ماتریس هیشین همیشه مثبت و ماتریس A از مرتبه m است حل بهینه به صورت کدام‌یک از موارد زیر است؟

۱) این مساله حل بهینه بی‌شمار دارد.

۲) حل بهینه مساله و ضرایب آن از سمت پایین نامحدود است.

۳) حل بهینه و ضرایب KKT همگی تابع خطی از t هستند.

۴) حل بهینه و ضرایب KKT همگی تابع خطی از هر بردار دلخواه d است به گونه‌ای که $d'Cd<۰$

۱۶- فرض کنید که می‌خواهیم یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی با تابع هدف و محدودیت‌های جداپذیر روی متغیرها را با استفاده از برنامه‌ریزی پویا حل کنیم. در این صورت:

۱) تعداد مراحل مساله برابر تعداد محدودیت‌های آن است.

۲) تعریف متغیرهای حالت ارتباطی به تعداد محدودیت‌های مساله ندارد.

۳) تعداد متغیرهای تصمیم در هر مرحله برابر تعداد محدودیت‌های مساله است.

۴) تعداد متغیرهای حالت در هر مرحله برابر تعداد محدودیت‌های مساله است.

۱۷- شرکتی قصد دارد سه نوع رنگ سیاه و سفید و قرمز را تولید نماید. هزینه آماده‌سازی دستگاه برای تولید هر نوع رنگ بستگی به رنگ نوع قبل دارد. چنان‌چه با استفاده از روس برنامه‌ریزی پویا بخواهیم ترتیب تولید رنگ را مشخص نماییم، در این صورت مرحله و وضعیت به صورت کدام گزینه تعریف می‌شوند؟

۱) مرحله هر یک از طرح‌های رنگ و وضعیت تعداد رنگ‌های تولید شده در ابتدای هر مرحله

۲) مرحله هر یک از طرح‌های رنگ و وضعیت تعداد رنگ‌های تولید شده در آخر هر مرحله

۳) تعداد متغیرهای تصمیم در هر مرحله برابر تعداد محدودیت‌های مساله است.

۴) تعداد متغیرهای حالت در هر مرحله برابر تعداد محدودیت‌های مساله است.

۱۸- یک مجتمع صنعتی تصمیم دارد به منظور توسعه فعالیت‌های خود، کارخانه‌ای جدید را تنها در یکی از دو شهر (الف) (x_A) یا شهر (ب) (x_B) تاسیس نماید. این مجتمع معتقد است در شهری که به این منظور انتخاب می‌شود، می‌توان انبار جدیدی نیز احداث کرد (y_A , y_B). برای تامین شرایط این مجتمع کدام‌یک از مجموعه روابط صفر-یک زیر مناسب می‌باشد؟

۱) $y_B - x_B \le ۱ , y_A - x_A \le ۱ , y_A + y_B = ۱ , x_A + x_B \le ۱$

۲) $y_B - x_B = ۰ , y_A - x_A = ۰ , y_A + y_B = ۱ , x_A + x_B = ۱$

۳) $y_B - x_B \ge ۱ , y_A - x_A \ge ۰ , y_A + y_B \le ۱ , x_A + x_B \ge ۱$

۴) $y_B - x_B \le ۰ , y_A - x_A \le ۰ , y_A + y_B \le ۱ , x_A + x_B = ۱$

۱۹- کدام گزینه زیر از اشکالات روش صفحات برش برای حل یک مساله برنامه‌ریزی تماما عدد صحیح (IP) محسوب نمی‌شود؟

۱) خطای گرد کردن در محاسبات وجود دارد.
۲) روش به سمت جواب بهینه همگرا نمی‌باشد.
۳) روش برای حل مسائل با ابعاد بزرگ کند است.
۴) تمام ضرایب و پارامترهای مساله باید عدد صحیح باشند.

۲۰- مساله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}.z = x_۱^۲ + x_۲^۲$$
$$\text{s.t.}$$
$$\begin{cases} (x_۱ - ۲)^۲ + (x_۲ - ۱/۵)^۲ \le ۶/۲۵ \\ ۳x_۱ + ۴x_۲ = ۱۲ \end{cases}$$

در این صورت مقدار بهینه z برابراست با:

۱) ۹
۲) ۱۶
۳) ۲۵
۴) تابع هدف z روی مجموعه قابل قبول مساله دارای ماکزیممی نیست.

پاسخنامه سوالات کنکور سراسری صنایع سال ۹۱

۱- گزینه ۲)

اگر مسئله p' شدنی باشد بنابراین حتما جواب بهینه متناهی دارد ولی ممکن است مسئله p' نشدنی باشد. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۲- گزینه ۳)

۳- گزینه ۱)

با ورود $x_۲$ به پایه، روی محدودیت ۱ حرکت کرده و در یکی از نقاط $(۲,۲),(۱,۳),(۰,۴)$ توقف می‌کنیم اما از آنجا که بین این نقاط فقط نقطه $(۲,۲)$ شدنی است جواب تست می‌نیمم نسبت برابر ۲ خواهد شد، توجه دارید که در شکل با ورود $x_۲$ به پایه، یک BS در خلاف جهت حرکت و سه BS در جهت حرکت داریم، بنابراین یک عنصر منفی و سه عنصر مثبت در ستون این متغیر غیرپایه در جدول متناظر $(۴,۰)$ است. با توجه به نقاط اشاره شده در بالا، تست می‌نیمم نسبت عبارتست از:

$$\theta = \min\{۲,۳,۴\} = ۲$$

۴- گزینه ۲)

اگر مقدار باقیمانده سمت راست محدودیت دوم برابر $S_۲$ باشد:

$$۰ \le x_۲ \le \frac{S_۲}{۶}$$

بنابراین گزینه‌های ۳ و ۴ که مقداری بیشتر از $\frac{S_۲}{۶}$ دارند حذف خواهند شد. به هر حال:

$$f_۲(S_۲, x_۲) = ۹x_۲^۲ + ۶\left(\frac{S_۲ - ۶x_۲}{۳}\right)^۲$$

$$\frac{\partial f_۲(S_۲, x_۲)}{\partial x_۲} = ۱۸x_۲ - ۸(S_۲ - ۶x_۲) = ۰ \Rightarrow x_۲ = \frac{۴}{۳۲}S_۲$$

با توجه به گزینه‌ها منظور طراح گزینه ۲ بوده است.

۵- گزینه ۳)

گزینه‌های ۱ و ۲ قدر مطلق در تابع هدف را به درستی حذف نکرده است، با توجه به نکات مثال‌ها و تست‌های بالا، داریم:

$$\min\ Z = y + ۳x_۳$$

$$\text{st.}\qquad y \ge |۳x_۱ - ۲x_۲| \ \Rightarrow \ \begin{cases} y \ge ۳x_۱ - ۲x_۲ \\ -y \le ۳x_۱ - ۲x_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ge ۳x_۱ - ۲x_۲ \\ y \ge -۳x_۱ + ۲x_۲ \end{cases}$$

$$x_۱ - ۲x_۲ \le ۹ + M\delta$$

$$۲x_۲ + ۴x_۳ \le ۱۵ + M(۱-\delta)$$

$$x_۱, x_۲, x_۳, y \ge ۰$$

$$\delta = ۰,۱$$

۶- گزینه ۲)

۷- گزینه ۲)

تابع هدف عبارتست از:

$$\text{Min}\ \ (x_۱ - ۳)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲ - ۱۳$$

عبارت $(x_۱ - ۳)^۲ + (x_۲ - ۲)^۲$ مقداری نامنفی دارد، علاقه‌ای به افزایش این مقدار نداریم، با توجه به شدنی بودن مرکز این دایره، جواب

بهینه عبارتست از مرکز دایره:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = ۳ \\ x_2^* = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow Z^* = -۱۳$$

۸- گزینه ۲)

با توجه به تنها محدودیت مسئله و با فرض $x_2 = \frac{c - ax_1}{b} \geq ۰$

$$z_1 = \text{Max Min}(x_1, \frac{c - ax_1}{b})$$
$$x_1 \geq ۰$$

داریم:

$$x_1^* = \frac{c - ax_1^*}{b} \Rightarrow x_1^* = \frac{c}{a+b} \Rightarrow x_2^* = \frac{c}{a+b} \Rightarrow z^* = \frac{c}{a+b}$$

۹- گزینه ۳)

۱۰- گزینه ۱)

روش اول:

با رسم شکل، طبق روش شاخه و حد محدودیت‌های:

$$x_2 \geq ۴ \quad , \quad x_2 \leq ۳$$

تولید شده ولی محدودیت $x_2 \geq ۴$، زیرمسأله حاصل را نشدنی می‌کند، بنابراین جواب $x_2 \leq ۳$ است.

روش دوم:

استفاده از روش گوموری که نیازمند جدول بهینه است.

۱۱- گزینه ۴)

۱۲- گزینه ۲)

۱۳- گزینه ۱)

برای حل معادله به کمک روش نیوتن - رافسون از فرمول تکرار:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

و برای حل مسئله برنامه‌ریزی غیر خطی به کمک روش نیوتن - رافسون از فرمول تکرار زیر استفاده می‌شود:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

با توجه به مشتقات مرتبه اول و دوم و تشکیل فرمول تکرار، حل معادله منظور بوده است.

۱۴- گزینه ۱)

ناحیه شدنی مسأله ۲ زیر مجموعه ناحیه شدنی مسأله ۱ است بنابراین:

$$z_1 \geq z_2$$

۱۵- گزینه ۳)

حل بهینه و ضرایب KKT (متغیرهای دوگان) همگی تابع هدف خطی از t هستند.

۱۶- گزینه ۴)

۱۷- گزینه ۲)

مرحله هر یک از طرح‌های رنگ و وضعیت تعداد رنگ‌های تولید شده در آخر هر مرحله می‌باشد. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۸- گزینه ۴)

۱۹- گزینه ۲)

۲۰- گزینه ۲)

دقیقاً مشابه مثال جزوه نکته و تست، جلسه آخر که رایگان برگزار شد. ناحیه شدنی اشتراک یک دایره توپر به شعاع ۲.۵ و یک خط است، حاصل آن پاره‌خط واصل نقاط $(۰,۳)$ و $(۴,۰)$ است. با توجه به تابع هدف باید دایره‌ای رسم کنیم که بزرگ‌ترین شعاع را داشته باشد، این دایره از مبدأ مختصات رسم می‌شود، فقط باید دو نقطه ابتدا و انتهای پاره‌خط را بررسی کنیم:

$$(۰,۳) \Rightarrow z = ۹$$

$$(۴,۰) \Rightarrow z^* = ۱۶$$

سوالات کنکور سراسری صنایع سیستم سال ۱۳۹۱

۱- مساله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&Max.z=|x_1|+|x_2|\\&s.t.\\&\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3<14\\3x_1-x_2+2x_3<7\\x_1>0,x_2>0,x_3>0\end{cases}\end{aligned}$$

این مساله یک برنامه‌ریزی خطی .... است که به‌وسیله روش ترسیمی ....

۱) خطی ـ قابل حل است.

۲) غیرخطی ـ قابل حل نیست.

۳) غیرخطی ـ قابل حل است.

۴) خطی ـ قابل حل نیست.

۲- شرکتی تصمیم دارد امکان سرمایه‌گذاری در ۴ پروژه را بررسی نماید. براین اساس و پس از بررسی‌های اولیه سیاست زیر را به عنوان یکی از سیاست‌های خود اتخاذ نموده است:

«اگر در پروژه شماره ۲ سرمایه‌گذاری کند در پروژه شماره یک نیز سرمایه‌گذاری کند و برعکس» با استفاده از متغیرهای صفر ـ یک کدام‌یک از حالات زیر سیاست مورد نظر این شرکت تأمین می‌گردد؟

۱) $x_1-x_2\le 0$ ۲) $x_1+x_2\ge 1$ ۳) $x_1+x_2=1$ ۴) $x_2-x_1=0$

۳- مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&Min.Z=x_1+x_2+3x_3\\&s.t.\\&\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3<14\\3x_1-x_2+2x_3<7\\x_1>0,x_2>0,x_3>0\end{cases}\end{aligned}$$

مجموعه قابل قبول این مساله .... و .... است.

۱) محدب ـ باز ۲) غیرمحدب ـ بسته ۳) غیرمحدب ـ باز ۴) محدب ـ بسته

۴- تعداد نقاط فرین (Extreme Points)، مجموعه قابل قبول سوال ۷۳ چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵- دو مساله برنامه‌ریزی ریاضی ۱ و ۲ زیر را درنظر بگیرید که در آن $g(x_1, x_2)$ یک تابع خطی است.

$$z_1 = \text{Min}\ 3x_1 + 4x_2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} g(x_1, x_2) = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$z_2 = \text{Min}\ 4x_1 + 5x_2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} g(x_1, x_2) = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

چه رابطه‌ای بین z_1 و z_2 وجود دارد؟

۱) $z_1 \geq z_2$
۲) $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2}$
۳) $\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} = \frac{1}{8}$
۴) $z_2 \geq z_1$

۶- اگر فضای موجه یک مساله برنامه‌ریزی خطی بیکران باشد در این صورت هر نقطه موجه این فضا را می‌توان به‌صورت .... نقاط گوشه و .... جهت‌های حدی موجود در آن نوشت. به ترتیب در محل‌های خالی چه کلماتی مناسب است؟

۱) ترکیب محدب، ترکیب محدب
۲) ترکیب خطی غیرمنفی، ترکیب خطی غیرمنفی
۳) ترکیب محدب، ترکیب خطی غیرمنفی
۴) ترکیب خطی غیرمنفی، ترکیب محدب

۷- هر حل امکان‌پذیر (موجه) در یک مدل حمل و نقل با m نقطه عرضه و n نقطه تقاضا:

۱) حداکثر به تعداد $(m \times n)$ متغیر با مقدار مثبت دارد.
۲) حداکثر $(m+n-1)$متغیر دارای مقدار غیرمنفی دارد.
۳) $(m+n-1)$ متغیر دارای مقدار غیرمنفی دارد.
۴) $(m+n-1)$ متغیر دارای متغیر دارای مقدار مثبت دارد.

۸- در حل یک مساله ماکزیمم‌سازی با روش سیمپلکس به جدول زیر رسیده‌ایم که اظهارنظر در مورد جواب بهینه صحیح است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	۲	۰	۰	۰	۰	۴	۱۵
x_2	۳	۱	۰	۲	۰	۲	۴
x_3	−۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
x_5	۰	۰	۰	۵	۱	−۳	۱۰

۱) مساله دارای جواب بهینه منحصر به فرد تباهیده است.
۲) مساله دارای ۲ جواب گوشه بینه تباهیده با درجه تباهیدگی متفاوت و بی‌نهایت جواب غیرگوشه بهینه است.
۳) مساله دارای ۲ جواب گوشه بهینه تباهیده با درجه تباهیدگی یکسان و بی‌نهایت جواب غیرگوشه بهینه است.
۴) مساله دارای یک جواب بهینه گوشه تباهیده و بی‌نهایت جواب بهینه غیرتباهیده است.

۹- فرض کنید جدول زیر نشان‌دهنده یکی از ترکارهای حل یک مساله ماکزیمم‌سازی با روش سیمپلکس باشد. کدام‌یک از بردارهای زیر یک جهت رأسی برای ناحیه شدنی این مسئله می‌باشد؟

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	7	-1	0	2	8
x_4	0	-3	-2	1	-1	2
x_1	1	4	-3	0	1	4

۱) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ +1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

۱۰- جدول حل بهینه مدل برنامه‌ریزی خطی زیر داده شده است. s_1 و s_2 متغیرهای کمکی می‌باشند. در مساله اصلی مقدار منبع اول را تا چه میزان می‌توان افزایش داد، به‌طوری که جواب هنوز موجه باقی بماند؟

$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ & z = 20x_1 + 10x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & 5x_1 + 4x_2 \le 30 \\ & 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
z	0	6	4	0	120
x_1	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
s_2	0	$\frac{17}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	1

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۱- مدل ریاضی یک مساله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف کمینه‌سازی داده شده است. جواب بهینه این مساله چگونه است؟

$$\text{Min}\ z = 2x_1 + x_2$$

s.t.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

۱) تبهگن ۲) نامحدود ۳) منحصر به فرد ۴) چندگانه

۱۲- مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Min}.y_0 = y_1 - 5y_2 + 6y_3$$
s.t.
$$\begin{cases} 2y_1 + \quad\quad 4y_3 \geq 50 \\ 2y_1 + 2y_2 \quad\quad \geq 30 \\ \quad\quad\quad y_3 \geq 10 \end{cases}$$

پس از حل مساله، حداقل مقدار y_0 چقدر است؟

۱) $-2/5$ ۲) ۰ ۳) $2/5$ ۴) مقداری نامحدود

۱۳- جدول بهینه سیمپلکس یک مساله برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف Max و سه محدودیت به فرم $\leq$ و دو متغیر اصلی x_1, x_2 عبارت است از:

پایه	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	جواب
z	۰	۰	۰	۳	۲	
s_1	۰	۰	۱	۱	-1	۲
x_2	۰	۱	۰	۱	۰	۶
x_1	۱	۰	۰	-1	۱	۲

وقتی‌که s_1, s_2, s_3 متغیرهای کمکی مربوط به سه محدودیت هستند. حداکثر مقدار تابع هدف کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۸ ۳) ۳۶ ۴) ۳۴

۱۴- در مساله قبلی (سوال ۸۳)، فرض کنید که می‌خواهیم به سمت راست یکی از محدودیت‌ها یک واحد اضافه کنیم. برای حداکثر کردن تابع هدف، شما کدام محدودیت را پیشنهاد می‌کنید؟

۱) اول ۲) دوم
۳) سوم ۴) در این مورد، هر سه محدودیت یکسان هستند.

۱۵- مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max}.z = 3x_1 - 2x_2 + 6x_3$$
s.t.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

حداکثر مقدار z پس از حل مساله چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۹ ۳) ۱۶/۰۸ ۴) مساله نامحدود است.

۱۶- در مساله برنامه‌ریزی خطی (سوال ۸۵) شبه قیمت (قیمت سایه‌ای) محدودیت اول چقدر است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) نامحدود

۱۷- در مورد رابطه بین جواب‌های مساله فروشنده دوره گرد (TSP) و مساله تخصیص متناظر آن می‌توان گفت که جواب بهینه مساله تخصیص، .... جواب بهینه TSP می‌باشد.

۱) یک حد پایین
۲) یک حد بالا
۳) همیشه یک جواب موجه برای یافتن
۴) همواره همان

۱۸- در حل یک مساله حمل و نقل در هنگام تشکیل حلقه برای تعیین متغیر خارج شونده از پایه، این حلقه از چه تعداد خانه موجود در هر سطر یا ستون جدول حمل و نقل استفاده می‌کند؟

۱) دو
۲) صفر یا دو
۳) تعداد خانه‌ها بستگی به تعداد منابع دارد.
۴) تعداد خانه‌ها بستگی به تعداد مقصدها دارد.

۱۹- جدول بهینه حمل و نقل برای یک مساله با سه منبع A و B و C و چهار مقصد D و E و F و G به صورت زیر نشان داده شده است. اگر هم میزان عرضه منبع C و هم میزان تقاضای مقصد F هر دو به اندازه دو واحد کم شوند، مقدار بهینه ارسال کالا از منبع A به مقصد E چقدر خواهد بود؟

	D	E	F	G	عرضه منابع
A		۱۰	۲۵		۳۵
B	۴۵		۵		۵۰
C		۱۰		۳۰	۴۰
تقاضای مقصدها	۴۵	۲۰	۳۰	۳۰	

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۲۳
۴) ۱۲

۲۰- در هنگام حل یک مساله تخصیص با روش مجارستانی در صورتی که پس از اجرای گام‌های اول و دوم روش تعداد خطوط پوشش عناصر صفر، کمتر از تعداد داوطلبین باشد در اینصورت کوچکترین عنصر .... را از سایر عناصر .... کم و به عناصر محل برخورد دو خط اضافه می‌کنیم. در محل‌های خالی، به ترتیب کدام کلمات مناسب است؟

۱) پوشش داده نشده، پوشش داده نشده
۲) پوشش داده شده، پوشش داده شده
۳) پوشش داده نشده، پوشش داده نشده
۴) پوشش داده نشده، پوشش داده شده

پاسخنامه سوالات کنکور سراسری صنایع سیستم سال ۱۳۹۱

۱- گزینه ۱)

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = (x_1' + x_1'') + (x_2' + x_2'') \\ &(x_1' + x_1'') - (x_2' + x_2'') \le ۲ \\ &-(x_2' + x_2'') \le ۳ \\ &x_1', x_1'', x_2', x_2'' \ge ۰ \end{aligned}$$

* ستون‌های x_1' و x_1'' به هم وابسته‌اند و همچنین ستون‌های x_2' و x_2'' نیز وابسته‌اند.
* چون مساله دوبعدی است با رسم شکل قابل حل است.

۲- گزینه ۴)

$$x_1 = x_2$$

۳- گزینه ۱)

دستگاه خطی $\begin{matrix} Ax < b \\ x > ۰ \end{matrix}$ نشان‌دهنده یک مجموعه محدب است و از طرفی این مجموعه طبق تعریف مجموعه باز (نقاط حدی ناحیه عضو ناحیه نباشد) یک مجموعه باز هم هست.

۴- گزینه ۱)

چون هیچ ابر صفحه‌ای ندارد نقطه فرین ندارد.

۵- گزینه ۴)

با توجه به ضرایب متغیرها در توابع هدف $\leftarrow z_1 < z_2$

۶- گزینه ۳)

طبق تعریف در مسائل برنامه‌ریزی خطی داریم که هر نقطه در ناحیه شدنی را می‌توان به‌صورت ترکیب محدب نقاط گوشه و ترکیب خطی غیرمنفی جهت راسی دور شونده ناحیه نوشت.

۷- گزینه ۴)

به دلیل آنکه حل امکان‌پذیر موجه است پس می‌تواند تمام متغیرها غیرصفر باشند (مثبت باشند).

۸- گزینه ۲)

ضریب سطر تابع x_4 صفر است و چون می‌نیمم نسبت نیز غیرصفر است (۲) پس جواب چندگانه با دو گوشه بهینه داریم. درجه تباهیدگی در جدول اول ۱ است و در جدول دوم درجه ۲ می‌باشد.

۹- گزینه ۳)

جهت دور شونده مربوط به متغیر x_3 می‌باشد.

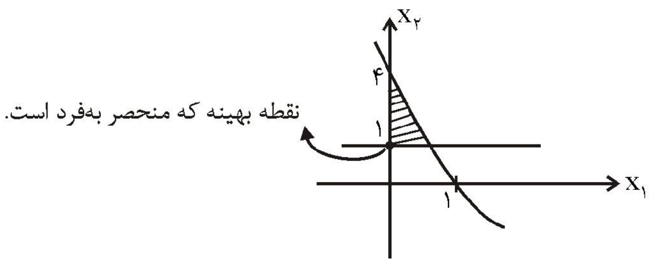
۱۰- گزینه ۴)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} \xrightarrow{\div ۲} \begin{pmatrix} \frac{۳}{۲} \\ ۰ \\ \frac{۱}{۲} \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

ستون اول در ماتریس B^{-1}	$-RHS$
$\frac{۱}{۵}$	$-۶ \to -۳۰$
$-\frac{۲}{۵}$	$-۱ \to +\frac{۵}{۲}$

$$\Rightarrow -۳ \le \Delta b_۱ \le \frac{۵}{۲}$$

۱۱- گزینه ۳)



۱۲- گزینه ۴)

$$y_۲ \to +\infty \Rightarrow y_۰ \to -\infty$$

۱۳- گزینه ۴)

پایه	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	
z	۰	۰	۰	۳	۲	
$s_۱$	۰	۰	۱	۱	−۱	۲
$x_۲$	۰	۱	۰	۱	۰	۶
$x_۱$	۱	۰	۰	−۱	۱	۲

(B^{-1} = ستون‌های $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$)

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۶ \\ ۲ \end{pmatrix} \to \begin{cases} b_۱ + b_۲ - b_۳ = ۳ \\ b_۲ = ۶ \\ -b_۲ + b_۳ = ۲ \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} b_۱ = ۴ \\ b_۲ = ۶ \\ b_۳ = ۸ \end{cases} \to z = C_B B^{-1} b$$

$$= \begin{pmatrix} ۰ & ۳ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۴ \\ ۶ \\ ۸ \end{pmatrix} = ۳۴$$

۱۴- گزینه ۲)

$$y_۱ = ۰ \qquad y_۲ = ۳ \qquad y_۲ = ۳$$

$$\xrightarrow{\qquad\qquad} \Delta z = \Delta b y_i$$

$$\xrightarrow[\text{محدودیت دوم}]{\qquad\qquad} \Delta z = \Delta b_۲ y_۲$$

$$= (+۱)(۳) = ۳$$

۱۵- جواب صحیح در گزینه‌ها نیست: مساله اولیه ناموجه است.

با ترسیم دو گانه مساله خواهیم دید که دوگان جواب نامحدود دارد پس اولیه ناموجه است.

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3y_1 + 10y_2 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& 3y_1 - 4y_2 \geq 2 \\
& 2y_1 + 3y_2 \geq 6
\end{aligned}
$$

۱۶- گزینه ۴)

با توجه به دوگان گزینه ۴ صحیح است.

۱۷- گزینه ۴)

جواب‌های اساسی و پایه‌ای هر دو یک درخت می‌باشد.

۱۸- گزینه ۲)

در روش پله سنگی یا از خانه‌های سطر یا ستونی استفاده نمی‌کنند و یا اگر استفاده کنند فقط ۲ بار استفاده می‌شود.

۱۹- گزینه ۲)

	D	E	F	G
A		10^{+2}	۳۵ -2	
B	۴۵			
C		10^{-2}		۳۰

۲۰- گزینه ۳)